Örnek: $x' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} x$ sisteminin genel çözümünü bulunuz.

$x = \xi e^{rt}$ şeklinde çözüm ararsak $\begin{pmatrix} 3-r & 2 & 4 \\ 2 & -r & 2 \\ 4 & 2 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ denklemini çözmemiz gerekir. Bu denklemin sıfırdan farklı çözümü için

$$\begin{vmatrix} 3-r & 2 & 4 \\ 2 & -r & 2 \\ 4 & 2 & 3-r \end{vmatrix} = -(r+1)^2 (r-8) = 0$$

olmalıdır. $r_1 = r_2 = -1$, $r_3 = 8$ köklerdir.

$r_1 = r_2 = -1$ için özvektör;

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0$$

$\xi_1 = k$, $\xi_3 = m$

$\xi_2 = -2k - 2m$

$$\xi = \begin{pmatrix} k \\ -2k-2m \\ m \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörlerdir.

$r_3 = 8$ için $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ özvektör.

Genel çözüm

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}$$

dir.

Hermityen Olmayan Sistemler

$$x' = Ax \tag{7.16}$$

Sisteminde katsayılar matrisi A Hermityen değil ise çözüm daha karışıktır. Eğer A reel ise A'nın özdeğerleri için üç durum vardır;

1) Bütün özdeğerler reel ve ayrıktır.
2) Bazı özdeğerler kompleks eşleniktir.
3) Bazı özdeğerler k (k>1) katlılığa sahiptir.

Birinci durumda zorluk yoktur. Özvektörler lineer bağımsız olacağından n-tane lineer bağımsız çözüm vardır.

Eğer özdeğerler kompleks eşlenik ise bütün özvektörler farklı ve n-tane lineer bağımsız çözüm vardır. 7.6'da

görebileceğimiz gibi reel değerli çözümler elde edebileceğiz.

Özdeğerlerin katlı olması durumunda ciddi zorluk vardır. Eğer katlı köke karşı gelen lineer bağımsız özvektörlerin sayısı katlı kökün katlılığından az ise lineer bağımsız çözümlerin sayısı n'den küçüktür. n-tane lineer bağımsız çözümün elde edilmesini 7.7'de göreceğiz.

Eğer A kompleks ve Hermityen değil ise kompleks özdeğerler kompleks eşlenik çifti olmak zorunda değildir. Çözümler genellikle kompleks değerlidir.

Örnek: 1) $x' = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} x$ sisteminin genel çözümünü bulunuz.

$x = \xi e^{rt}$ şeklinde çözüm aranırsa, $\begin{pmatrix} 2-r & 2+i \\ -1 & -1-i-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cebirsel denklem sistemini çözmemiz gerekir.

$$\begin{vmatrix} 2-r & 2+i \\ -1 & -1-i-r \end{vmatrix} = r^2 + (-1+i)r - i = (r-1)(r+i) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = 1 \\ r_2 = -i \end{array}$$

$r_1 = 1$'e karşı gelen özvektör

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ -1 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$r_2 = -i$'e karşı gelen özvektör

$$\begin{pmatrix} 2+i & 2+i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Genel çözüm

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-it}$$

2) $x' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$x = \xi e^{rt}$ şeklinde çözüm ararsak $\begin{pmatrix} 5-r & -1 \\ 3 & 1-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ denklemini çözmemiz gerekir.

$$\begin{vmatrix} 5-r & -1 \\ 3 & 1-r \end{vmatrix} = r^2 - 6r + 8 = (r-2)(r-4) = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 4$$

$r_1 = 2$'e karşı gelen özvektör

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$r_2 = 4$'e karşı gelen özvektör

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Genel çözüm

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

dır.

$$t=0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2 \\ 3c_1 + c_2 = -1 \end{array}$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}, \; c_2 = \frac{7}{2}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

7.6 Kompleks Özdeğerler

$$x' = Ax \qquad (7.16)$$

Sisteminde katsayılar matrisi A reel-değerli ve A'nın $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$ (λ, μ reel) özdeğerleri kompleks eşlenik $r_3, r_4, \dots, r_n$ reel ayrık olsun. r_1, r_2'ye karşı gelen özvektörler $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ de kompleks eşleniktir. Gerçekten

$$(A - r_1 I)\xi^{(1)} = 0$$

denkleminin eşleneği alınırsa

$$\overline{(A - r_1 I)\xi^{(1)}} = \bar{0} \Rightarrow (A - r_2 I)\overline{\xi^{(1)}} = 0 \Rightarrow \xi^{(2)} = \overline{\xi^{(1)}}$$

olduğu görülür. (katı olabilir). Dolayısıyla $X^{(1)}$ ve $X^{(2)}$ çözümleri

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \quad x^{(2)}(t) = \overline{\xi^{(1)}}\, e^{\overline{r_1} t}$$

şeklindedir. a ve b reel olmak üzere $\xi^{(1)} = a+ib$ ile gösterirsek

$$x^{(1)}(t) = (a+ib)e^{(\lambda+i\mu)t} = (a+ib)e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\sin\mu t)$$

$$= (a\cos\mu t - b\sin\mu t)e^{\lambda t} + i(a\sin\mu t + b\cos\mu t)e^{\lambda t}$$

elde ederiz. $x^{(1)}(t) = u(t) + i v(t)$ şeklinde yazarsak

$$u(t) = e^{\lambda t}(a\cos\mu t - b\sin\mu t)$$

$$v(t) = e^{\lambda t}(a\sin\mu t + b\cos\mu t)$$

(7.16)'nın reel değerli çözümleridir. Wronskiyanları sıfırdan farklı olduğundan bu çözümler lineer bağımsızdır. Buna göre (7.16)'nın genel çözümü

$$x = c_1 u(t) + c_2 v(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{r_3 t} + \cdots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}$$

dir.

Örnek: 1) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x$ sisteminin genel çözümünü bul.

$x = \xi e^{rt}$, $\begin{pmatrix} 3-r & -2 \\ 4 & -1-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-r & -2 \\ 4 & -1-r \end{vmatrix} = r^2 - 2r + 5 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm 2i$$

$r_1 = 1+2i$ 'e karşı gelen özvektör,

$$\begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$r_2 = 1-2i$ 'e karşı gelen özvektör $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

$$u(t) = e^{t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin 2t\right)$$

$$v(t) = e^{t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 2t\right)$$

Genel çözüm

$$X = c_1 u(t) + c_2 v(t)$$
$$= c_1 e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 2t \right) + c_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t \right)$$
$$= c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} e^t$$

2) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ başlangıç değer prob. çöz.

$X = \xi e^{rt}$, $\begin{pmatrix} 1-r & 0 & 0 \\ 2 & 1-r & -2 \\ 3 & 2 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-r & 0 & 0 \\ 2 & 1-r & -2 \\ 3 & 2 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)(r^2 - 2r + 5) = 0$

$r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm 2i$

$r_1 = 1$'e karşı gelen özvektör $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r_2 = 1 + 2i$'e karşı gelen özvektör $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$r_3 = 1 - 2i$ " " " " $\xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

$$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^t (\cos 2t + i \sin 2t)$$
$$= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 2t \right] e^t$$
$$+ i \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t \right] e^t$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^t.$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} e^t$$

Genel Çözüm

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} e^t$$

dir.

$$t=0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 2$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos 2t + 2\sin 2t \\ -\sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix} e^t$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 - \cos 2t + 2\sin 2t \\ 2 - \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix} e^t$$